Mathematiques Expertes - Ter –

Synthese de cours et livret de formules

Option Mathematiques Expertes - Nouveau Bac

Sommaire

3. Nombres complexes et trigonométrie

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct

Formules d'addition	Pour tous réels α et β, on a : $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\beta)$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cos(\beta)$
Formules de duplication	Pour tout réel α, on a : $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$ $=2\cos^2(\alpha)-1$ $=1-2\sin^2(\alpha)$
Exponentielle imaginaire	Pour tout réel θ, on définit la fonction φ par : $\varphi(\theta)=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ $\varphi(0)=1$ et la fonction φ vérifie **la relation fonctionnelle** : $\varphi(\theta+\theta')=\varphi(\theta)\times\varphi(\theta')$ Par analogie avec les propriétés de la fonction exponentielle réelle $\theta\mapsto e^{\theta}$, on appelle φ la **fonction exponentielle imaginaire** et on note : $\varphi(\theta)=e^{i\theta}$ <u>**Exemples**</u> : $e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $e^{2i\pi}=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=1$ $e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$ $e^{i\pi}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1$

5. Utilisation des nombres complexes en géométrie (II)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct

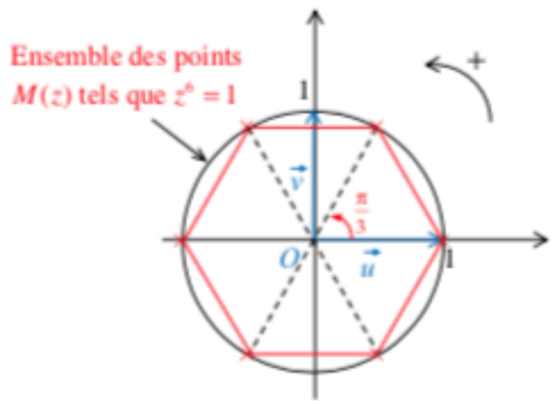
Ensemble $\mathbb{U}_n$

n est un entier naturel **non nul**

- On note **$\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité** :
$$\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$$
- **En particulier** :
$\mathbb{U}_2 = \left\{ 1 ; e^{i\pi} \right\} = \left\{ 1 ; -1 \right\}$
$\mathbb{U}_3 = \left\{ 1 ; e^{\frac{2i\pi}{3}} ; e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$; en notant $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on obtient : $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1 ; j ; j^2 \right\}$
$\mathbb{U}_4 = \left\{ 1 ; e^{i\frac{\pi}{2}} ; e^{i\pi} ; e^{\frac{3i\pi}{2}} \right\} = \left\{ 1 ; i ; -1 ; -i \right\}$
- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct, **les images des racines n-ièmes de l'unité** forment un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique, et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1

<u>**Exemple**</u>

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct, les images des 6 racines 6[èmes] de l'unité forment un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique, et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1



Théorème

n est un entier naturel **non nul**

Si **ω est une racine n-ième de l'unité**, avec **$\omega \neq 1$**, alors :
$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$$

En particulier, **la somme des n racines n-ièmes de l'unité est nulle** :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$$

12. Notion de matrice

Définition d'une matrice

p et q sont deux entiers naturels **non nuls**

Une **matrice à p lignes et q colonnes** est un tableau de nombres réels à p lignes et q colonnes

Les nombres sont appelés les **coefficients de la matrice**,

Si on note la matrice A, alors les coefficients sont notés a_{ij} où i est le numéro de la ligne et j celui de la colonne :

$$\mathrm{A} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{2q} \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}}_{p \text{ lignes}}\right\} q \text{ colonnes}$$

On dit que la matrice est de **dimension $(p;q)$ ou $p\times q$**

Exemple

$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3

Le coefficient noté m_{23} est situé à l'intersection de la 2ème ligne et la 3ème colonne : $m_{23} = 2$

Cas particuliers

p et q sont deux entiers naturels **non nuls**

A est une matrice de dimension $p\times q$

- Si $\boldsymbol{p = q}$, alors A est une matrice carrée de taille p (ou d'ordre p)

  Exemple

  $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de carrée de taille 2

- Si $\boldsymbol{p = 1}$, alors A est une matrice ligne de taille q

  Exemples

  $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de taille 3

  Les coordonnées d'un point du plan sont des matrices lignes

- Si $\boldsymbol{q = 1}$, alors A est une matrice colonne de taille p

  Exemples

  $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de taille 2

  Les coordonnées d'un vecteur du plan sont des matrices colonnes

15. Résolution de systèmes linéaires à l'aide des matrices

n un entier naturel **non nul**

Écriture matricielle d'un système linéaire

(S) est un système linéaire de n équations à n inconnues réelles $(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et $(b_1, b_2, ..., b_n)$ sont des réels

Si on pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Alors **l'écriture matricielle du système (S)** est :

$$A \times X = B$$

<u>**Exemple**</u>

On considère le système (S) à 3 équations et 3 inconnues :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -1 \\ x + y - 5z = 2 \\ -4x + 3y = 6 \end{cases}$$

L'écrire matricielle de (S) est A × X = B avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Théorème

A X = B est l'écriture matricielle d'un système linéaire à n équations

Si **la matrice A est inversible**, alors le système a une unique solution :

$$X = A^{-1} \times B$$

Si **la matrice A n'est pas inversible**, alors :

- soit le système a une infinité de solutions
- soit le système n'a pas de solution