Mathematiques Specialite - Ter – Synthese de cours et livret de formules

Enseignement de specialite – Classe de Terminale

Mathematiques Terminale - Nouveau Bac

Sommaire

1. Combinatoire et dénombrement

n et k sont des entiers naturels

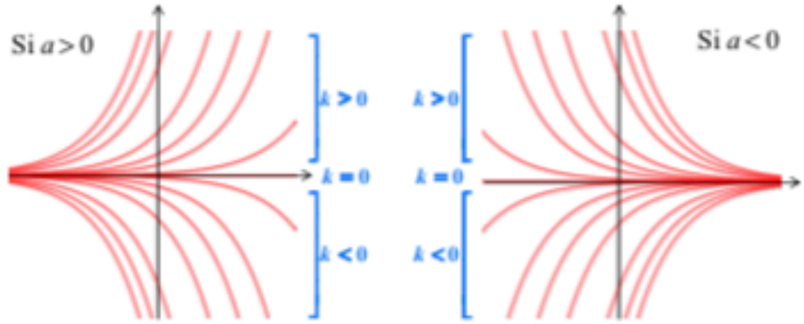
Cardinal d'un ensemble fini	Si E un ensemble fini, alors on appelle **cardinal de E**, et on note **card(E)**, le nombre d'éléments de E
Factorielle d'un entier n	On appelle **factorielle de n**, et on note $n!$, le nombre égal au produit de tous les nombres entiers de 1 à n : $$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$ Par convention : $0! = 1$
Principe additif	Si A et B sont deux ensembles finis **disjoints** ($A \cap B = \varnothing$), alors **le nombre d'éléments de A ∪ B** est : $$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$
Produit cartésien de deux ensembles	A et B sont deux ensembles On appelle **produit cartésien de A et de B**, et on note **A × B** (« **A fois B** »), l'ensemble des couples $(a\,;b)$, où a appartient à A et b appartient à B : $$A \times B = \left\{(a;b) \,/\, a \in A \text{ et } b \in B\right\}$$
Principe multiplicatif	Si A et B deux ensembles **finis**, alors l'ensemble **A × B est fini** et **le nombre d'élément de A × B** : $$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$
Ensemble E^k	E est un ensemble fini et k un entier non nul **L'ensemble E^k** est le produit cartésien : $E^k = \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{k \text{ fois}}$ E^2 est le produit cartésien E × E, appelé **carré cartésien** Le **nombre d'éléments de E^k** est : $$\text{card}\left(E^k\right) = \underbrace{\text{card}(E) \times \text{card}(E) \times \ldots \times \text{card}(E)}_{k \text{ fois}} = \left(\text{card}(E)\right)^k$$ <u>**Exemple**</u> Le nombre de codes à 4 chiffres (choisis entre 1 et 9, avec répétitions possibles) que l'on peut composer est un élément du produit cartésien $\left\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\right\}$ Il y a en donc $9^4 = 6\ 561$ possibles

5. Limites de suites

Démonstration par récurrence	Démontrer qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$: • 1ère étape : Initialisation Montrer que la propriété $P(n_0)$ est vraie On dit que **la propriété est initialisée au rang $n = n_0$** • 2ème étape : Hérédité Montrer que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$: supposer que P(n) est vraie pour un entier n **quelconque** $(n \geq n_0)$, puis par une succession de raisonnements, démontrer que P(n + 1) est vraie **La propriété est dite héréditaire à partir du rang $n = n_0$** • Conclusion Par initialisation et par hérédité, selon le principe de récurrence, la propriété P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$
Suite minorée, majorée, bornée	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** s'il existe **un réel m** tel que : $u_n \geq m$ pour tout entier n La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe un **réel M** tel que : $u_n \leq M$ pour tout entier n La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée
Suite convergente	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers un réel ℓ** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les valeurs u_n à partir d'un certain rang Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que : $n \geq N \Rightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon$ On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ **Exemple** : $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers 0
Unicité de la limite	Si **la suite (u_n) converge**, alors sa limite ℓ est unique
Propriété	Si **la suite (u_n) converge**, alors (u_n) **est bornée** Attention : la réciproque est fausse
Suites convergentes de référence	Les suites de **terme général** $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$ **et** $\frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n > 0)$ sont convergentes et ont pour limite 0

13. Primitives et équations différentielles (III)

Résolution de l'équation $y' = ay + b$, a et b des réels, $a \neq 0$

Solutions de l'équation homogène $y' = ay$	a est un réel **non nul** **L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' = ay$** sont les fonctions f_{h} définies par : pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f_{\mathrm{h}}(x) = ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$ **L'allure des courbes f_{h}** est : 
Solution particulière de l'équation $y' = ay + b$	a et b sont des réels, $a \neq 0$ Une **solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$** est la fonction f_0 définie par : pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f_0(x) = -\dfrac{b}{a}$ $(a \neq 0)$
Solutions de l'équation $y' = ay + b$	a et b sont des réels, $a \neq 0$ D'après le principe de superposition, **les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$** sont les fonctions f définies sur I par : pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = -\dfrac{b}{a} + ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$ **<u>Exemple</u>** Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y + 1$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\dfrac{1}{2} + ke^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$