SOMMAIRE

1. COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT 5
2. RAPPELS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES 8
3. RAPPELS SUR LES SUITES ARITHMÉTIQUES 11
4. RAPPELS SUR LES SUITES GÉOMÉTRIQUES 14
5. LIMITES DES SUITES 17
6. LIMITES DES FONCTIONS 21
7. RAPPELS SUR LA DÉRIVATION 23
8. COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION 26
9. CONTINUITÉ DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE 29
10. RAPPELS SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE 32
11. FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN 34
12. FONCTIONS COSINUS ET SINUS 37
13. PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 40
14. CALCUL INTÉGRAL 44
15. VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE 48
16. ORTHOGONALITÉ ET DISTANCE DANS L'ESPACE 52
17. REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES ET ÉQUATIONS CARTÉSIENNES 56
18. RAPPELS SUR LES PROBABILITÉS ET LES VARIABLES ALÉATOIRES 60
19. SCHÉMA DE BERNOULLI ET LOI BINOMIALE 63
20. SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES 66
21. CONCENTRATION ET LOI DES GRANDS NOMBRES 69
22. ALGORITHME ET PROGRAMMATION AVEC PYTHON 73

CORRIGÉS DES EXERCICES 77

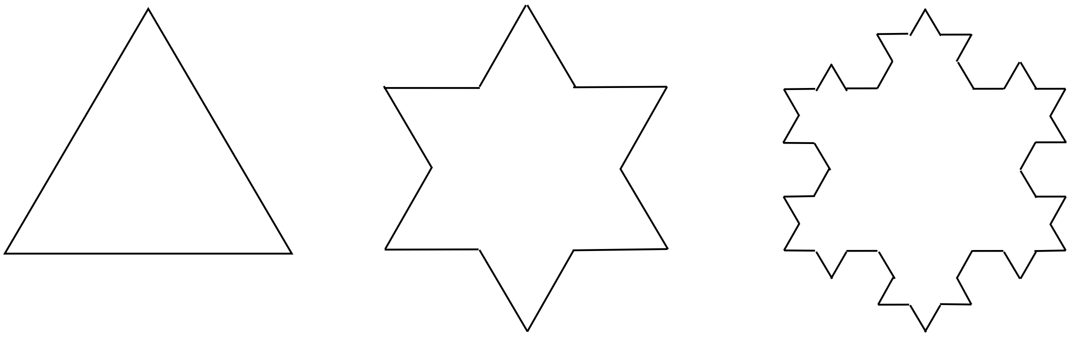
2. Rappels sur les suites numériques (III)

Exercice 10

★ ★ ★

La figure ci-dessous représente la construction d'un flocon de Von Koch :

Etape 0 Etape 1 Etape 2



A l'étape initiale, on considère un triangle équilatéral de côté 1 cm.
Puis, à chaque étape :

- on divise chaque côté du triangle en trois segments de même longueur ;
- sur chaque côté, on remplace le segment du milieu par un triangle équilatéral ayant pour base ce segment.

Pour tout entier naturel n, on note p_n le périmètre du flocon à l'étape n.

1. Calculer la valeur de p_0.
2. Déterminer, en justifiant, le nombre d_n de côtés du flocon à l'étape n et la longueur ℓ_n de chaque côté.
   Indication : on pourra par exemple montrer que (d_n) et (ℓ_n) *sont des suites géométriques, et rechercher leur forme explicite.*
3. En déduire une expression de p_n en fonction de n.
4. Etudier la monotonie de la suite (p_n) et conjecturer sa limite à l'aide de la calculatrice.

7. Rappels sur la dérivation (III)

Exercice 8

★ ★ ☆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{3\}$ par : $f(x)=4x+1-\dfrac{1}{3-x}$, et C_f sa courbe représentative dans un repère.

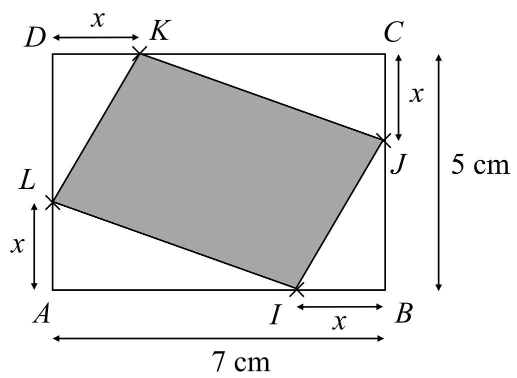
1. Calculer la dérivée de f et montrer que : $f'(x)=\dfrac{(-2x+5)(-2x+7)}{(3-x)^2}$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}-\{3\}$ et dresser son tableau de variation complet (en précisant la valeur des extrema).
3. Déterminer une équation de T, la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
4. Combien C_f admet-elle de tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier.

Exercice 9

★ ★ ☆

$ABCD$ est un rectangle, $AB = 7$ cm et $BC = 5$ cm.
Les points I, J, K et L sont des points appartenant respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ et tels que :

$$IB = JC = KD = LA = x$$
$$(\text{avec } 0 < x < 5).$$



1. Quelle doit être la valeur de x pour que la figure grisée ait une aire de 25 cm^2 ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle minimale ?

Exercice 10

★ ★ ☆

Un industriel doit fabriquer une boite fermée de volume 1 dm^3, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur y dm ($y > 0$), et dont la base est un carré de côté x dm ($x > 0$). Afin de réduire ses coûts de production, il cherche à construire la boite dont l'aire est minimale.

1. Justifier que $y=\dfrac{1}{x^2}$. En déduire que l'aire totale de la boite est : $A(x)=2x^2+\dfrac{4}{x}$.
2. Justifier que la fonction A est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$:
$$A'(x)=\frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}.$$
3. En déduire le tableau de variations de A sur $]0;+\infty[$.
4. Donner les dimensions de la boite dont l'aire est minimale.

8. Compléments sur la dérivation

Exercice 1

★ ★ ☆

Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de dérivabilité :

- $f(x)=\sqrt{x^2-1}$
- $g(x)=(4x-3)^3$
- $h(x)=\dfrac{2}{(x+4)^5}$
- $i(x)=\mathrm{e}^{6x-1}$
- $j(x)=\ln(4x-3)$
- $k(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{6x-1}}$

Exercice 2

★ ★ ☆

Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de dérivabilité :

- $f(x)=\sin(-x)$
- $g(x)=\cos(2x)$
- $h(x)=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{12}\right)$
- $i(x)=\cos\left(-2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 3

★ ★ ☆

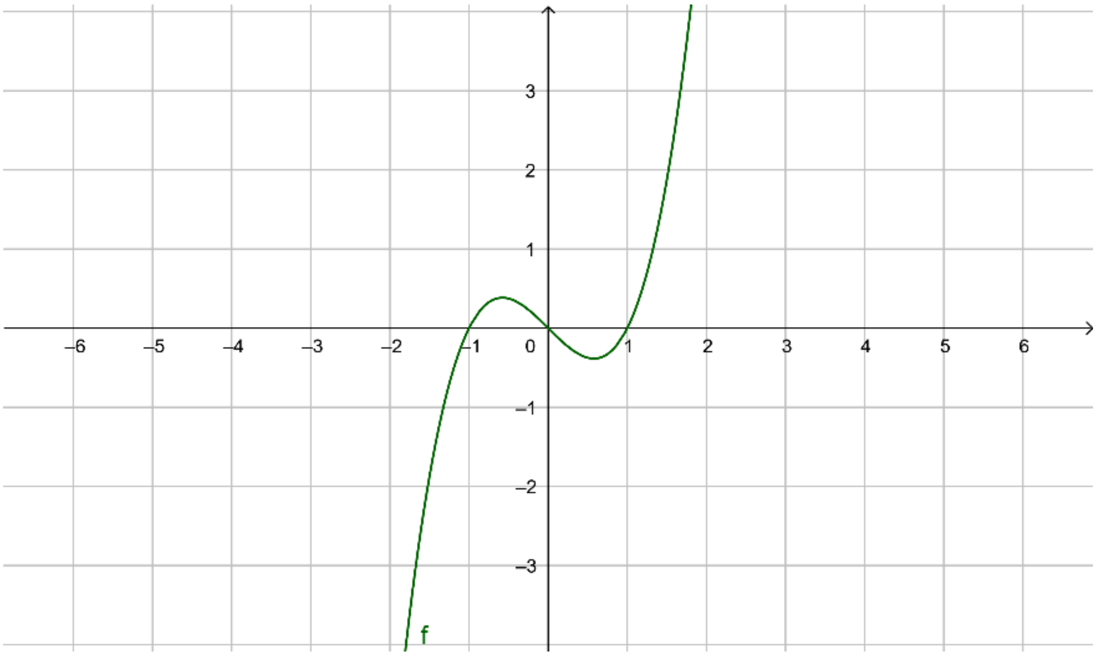
Calculer les dérivées secondes des fonctions suivantes et étudier leur signe sur leur ensemble de définition :

- $f(x)=(4x-3)^3$
- $g(x)=\dfrac{2}{x+4}$
- $h(x)=x\mathrm{e}^{x^2-1}$
- $i(x)=\ln(2x-3)$

Exercice 4

★ ★ ☆

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde f'' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Avec la précision permise par le graphique, déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe / concave. On précisera les éventuels points d'inflexion.

8. Compléments sur la dérivation (II)

Exercice 5

★ ★ ☆

1. On note u la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $u(x)=1+\dfrac{1}{x}$.
   Justifier que u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer $u'(x)$.
2. Soit g une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que : $g(2)=1$.
   Pour tout réel $x>0$: $g'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.
   Dresser le tableau des variation de la fonction g.
3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=g\left[u(x)\right]$.
   On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f(1)$.
   b) Déterminer $f'(x)$.
4. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
   Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

Exercice 6

★ ★ ☆

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $f(x)=-x\ln(x)+2x+1$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.
Montrer que la courbe C est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0;10]$.

Exercice 7

★ ★ ☆

Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a représenté trois courbes C_1, C_2 et C_3 définies sur l'intervalle $[-3;7]$.

Une de ces courbes représente une fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente la dérivée seconde de f.

1. Quelle courbe est associée à la fonction f ? A la fonction f' ? A la fonction f'' ? Justifier vos réponses (éventuellement par des tableaux de signe et de variation).
2. Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f et indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.